محیط‌شناسی، دورهٔ ۴۲، شمارهٔ ۲، تابستان ۱۳۹۵، صفحهٔ ۴۱۰-۳۹۷

کاربرد مدل احتمال برگشتی در ردیابی منابع آلاینده در رودخانه در شرایط وجود جریان غیریکنواخت

علیرضا قانع[۱]، مهدی مظاهری[۲]*، جمال محمدولی سامانی[۳]

۱. دانشجوی کارشناسی ارشد سازه‌های آبی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

۲. استادیار گروه سازه‌های آبی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

۳. استادگروه سازه‌های آبی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

تاریخ وصول مقاله: ۱۳۹٤/۳/۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۵/۲/۲۷

چکیده

معمولاً آلاینده‌ها به صورت ناگهانی و نامحسوس در رودخانه‌ها تخلیه می‌شوند. به منظور کاهش خسارات وارده نیاز است هرچه سریع‌تر مکان و زمان ورود آلاینده مشخص شود. به همین منظور می‌بایست از مدل‌های بازگشتی در زمان و مکان استفاده شود. مدل احتمال برگشتی یکی از مدل‌های تشخیص مکان و زمان رهاسازی آلاینده است. تشخیص منبع آلاینده با دو پارامتر مکان و زمان رهاسازی روبه‌رو است. بر همین اساس، در مدل برگشتی احتمالی دو نوع احتمال معرفی می‌شود: ۱. احتمال برگشتی زمان پیمایش آلاینده؛ ۲. احتمال برگشتی مکان. به کاربرد این روش در آب‌های سطحی کمتر توجه شده، لذا مهم‌ترین هدف این پژوهش کاربرد مدل احتمال برگشتی در تشخیص منابع آلاینده در رودخانه با شرایط غیریکنواخت و ماندگار است. مدل حاضر براساس آنالیز الحاقی برای کاربرد در رودخانه‌ای با شرایط عمومی توسعه داده شده است. در مرحلهٔ اول مدل با استفاده از اطلاعات رودخانهٔ فرضی با شرایط ثابت صحت‌سنجی و در بخش دوم مدل برای رودخانه‌ای با شرایط غیریکنواخت به کار گرفته شده است. نتایج مدل نشان می‌دهد که مدل به خوبی قادر به پیش‌بینی مکان و زمان رهاسازی آلاینده در یک رودخانه با شرایط غیریکنواخت و ماندگار است.

کلیدواژه

آنالیز الحاقی، رودخانهٔ غیریکنواخت و ماندگار، شناسایی منبع آلاینده، مدل احتمال برگشتی.

مقدمه

زمانی که آلاینده‌ای در رودخانه مشاهده می‌شود، پرسش اولیه و نگران‌کننده‌ای که تمامی بهره‌برداران با آن مواجه خواهند بود عبارت است از: آلایندهٔ مشاهده‌شده از چه مکان و در چه زمانی از بالادست رها شده است. پاسخ دقیق به این پرسش به دلیل شرایط پیچیدهٔ رودخانه از جمله پدیده‌های پراکندگی و جابه‌جایی، غیریکنواختی رودخانه و اضافه‌شدن جریان‌های متعدد طی رودخانه تا حدودی با دشواری روبه‌روست. به منظور پاسخ به پرسش حاضر، در این پژوهش سعی شده است با استفاده از روش احتمال برگشتی و با تکیه بر شمار اندکی از مشاهدات به پرسش حاضر پاسخ داده شود. از طرفی مسئلهٔ یافتن اتفاقات گذشته، با تکیه بر شمار اندکی از مشاهدات همواره با عدم قطع یقین همراه است. بنابراین، تشخیص منبع آلاینده با دو پارامتر مکان و زمان رهاسازی روبه‌روست. بر همین اساس، در مدل احتمال برگشتی دو نوع احتمال معرفی می‌شود: ۱. احتمال برگشتی زمان پیمایش[۱]؛ ۲. احتمال برگشتی مکان[۲]. احتمال زمان پیمایش

* نویسنده مسئول: Email: m.mazaheri@modares.ac.ir

با فرض مشخص‌بودن مکان رهاسازی، زمان رهاسازی در گذشته را به دست می‌دهد. این در حالی است که احتمال برگشتی مکان نشان می‌دهد که در یک زمان رهاسازی مشخص، آلاینده از چه مکانی رها شده است. احتمال برای مکان و زمان می‌تواند به صورت مستقیم با معادلات برگشت در زمان با جریان برگشتی محاسبه شود. در این روش، شبیه‌سازی یک مرتبه اجرا، سپس احتمال زمان پیمایش و احتمال برگشتی مکان محاسبه می‌شود. این روش نسبت به دیگر روش‌ها ساده‌تر، سریع‌تر و اقتصادی‌تر و مزیت عمدهٔ آن نسبت به دیگر روش‌ها عدم ساده‌سازی بیش از حد مسئله نسبت به واقعیت است. از سوی دیگر، در بسیاری از روش‌های بازگشتی، مسئله با غیریکتایی پاسخ‌ها روبه‌روست. در مقابل، در روش احتمال برگشتی جواب مسئله به صورت احتمال در مکان و زمان بیان می‌شود و مسئله با غیریکتایی پاسخ‌ها روبه‌رو نخواهد بود.

مدل احتمال برگشتی در هیدرولوژی آب‌های زیرزمینی برای مشخص‌کردن مکان اولیهٔ رهاسازی آلاینده استفاده شده است. Liu در سال ۱۹۹۵ مدل احتمال برگشتی پیوسته را به منظور تعیین مکان اولیهٔ آلودگی ناگهانی رصدشده در چاه مشاهداتی معرفی کرد. او با به کارگیری یک روش ابتکاری، مدل برگشتی پیوسته را از مدل پیش‌رو استخراج کرد و برای احتمال مکانی و زمانی آن را توسعه داد. سپس Neupauer و Wilson در سال‌های ۱۹۹۹ و ۲۰۰۱ نشان دادند که روش احتمال برگشتی مکان و زمان پیمایش می‌تواند به‌منزلهٔ جزء الحاقی[3] از غلظت باشد. آن‌ها روش ریاضی‌ای به نام روش جزء الحاقی[4] به منظور اثبات معادلات حاکم، شرایط مرزی و شرایط اولیهٔ مدل احتمال برگشتی برای دامنهٔ یک‌بعدی (۱۹۹۹) و چندبعدی و شرایط ماندگار (۲۰۰۱) ارائه کردند. آن‌ها در سال ۲۰۰۲ با استفاده از روش جزء الحاقی، مسئله را برای شرایط جریان غیریکنواخت و جریان انتقالی در محیط متخلخل به صورت احتمال برگشتی حل کردند. Find در سال ۲۰۰۲ روش جزء کمکی را در منطقهٔ واترلو کانادا به کار برد. نتایج روش جزء الحاقی مطابقت مناسبی با شرایط واقعی نشان می‌دهد. Neupauer و Wilson همچنین در سال ۲۰۰۴ مدل احتمال برگشتی را برای حالتی که اطلاعات از چندین نقطهٔ آبخوان برداشت شود، گسترش دادند و مسئله را با وجود چندین نقطهٔ مشاهداتی و داده‌های واقعی صحت‌سنجی کردند. تشخیص منبع آلاینده در آب زیرزمینی با استفاده از این روش بسیار توسعه یافته، اما در آب‌های سطحی مطالعات بسیار محدودی در این زمینه انجام شده است. Cheng و Jia در سال ۲۰۱۰ مدل احتمال برگشتی جزء الحاقی (ارائه‌شده از سوی Neupauer و Wilson) را با استفاده از معادلات آب‌های کم‌عمق، در پهنه‌های آب سطحی با شرایط غیریکنواخت ماندگار و دوبعدی به کار بردند، سپس مدل را با استفاده از میانگین خطای نسبی RMSE بهینه کردند. بنابراین، مدل قادر به تشخیص هم‌زمان مکان و زمان رهاسازی شد. در این پژوهش مدل با استفاده از دو مثال فرضی صحت‌سنجی شده است. همچنین، مدل مذکور برای شرایط کانالی کاملاً متقارن به کار گرفته شده است. نتایج نشان می‌دهد که مدل توانایی تشخیص منبع آلایندهٔ نقطه‌ای در شرایط کانال کاملاً متقارن را دارد.

Dang و Ehrhardt در سال ۲۰۱۲ با استفاده از روش جزء الحاقی معادله‌ای را به منظور شناسایی محل تخلیه، همچنین جابه‌جایی لکهٔ نفتی بعد از حادثهٔ تخلیه در سطح دریا ارائه کردند. هدف اصلی این پژوهش یافتن مکان و زمان رهاسازی لکهٔ نفتی است. روش ارائه‌شده از سوی آن‌ها در خلیج ویتنام استفاده شده و به صورت مؤثر هدف پژوهش را برآورده کرده است. یکی دیگر از اهداف اصلی این مقاله آنالیز رویکردهای عددی برای شبیه‌سازی تخلیهٔ ناگهانی لکهٔ نفتی است که حرکت و سرنوشت لکهٔ نفتی را پیش‌بینی می‌کند. این پیش‌بینی می‌تواند به منظور اقدامات پاک‌سازی و حفظ مناطق باارزش از لحاظ اکولوژیکی استفاده باشد. Molsen و Frind در سال ۲۰۱۲ با استفاده از

مدل احتمال برگشتی منطقهٔ تحت تأثیر چاه را مشخص و روشی برای تعیین میزان آسیب‌پذیری آبخوان ارائه کردند. آن‌ها روشی جایگزین به منظور تعیین منطقهٔ تحت تأثیر چاه براساس مفهوم عمر متوسط ارائه کردند. به عبارت دیگر، با استفاده از مفهوم زمان برگشتی پیمایش آلاینده، شکل کلی آبخوان مشخص می‌شود. مدل دوبعدی و سه‌بعدی توسعه‌داده‌شده به‌خوبی با داده‌های واقعی حاصل از چاه‌های حوضهٔ آبریز واترلو اعتبارسنجی شده است. Cupola در سال ۲۰۱۴ مدل احتمال برگشتی و مدل مبتنی بر روش‌های زمین‌آماری را با یکدیگر مقایسه کرد. در پژوهش اخیر از داده‌های آزمایشگاهی تحت شرایط کاملاً کنترل‌شده استفاده شده است. نتایج نشان می‌دهد که روش زمین‌آماری قادر است، تابع اولیهٔ رهاسازی آلاینده و مکان رهاسازی را به‌خوبی تشخیص دهد، اما از مشکلات این مدل نیاز به فرض اولیه، برای تابع رهاسازی و مشخص‌کردن چند نقطهٔ مظنون به منبع آلاینده است. روش احتمال برگشتی تنها به یک نقطهٔ رصد با تعداد معدودی مشاهده نیاز دارد، در حالی که مدل زمین‌آماری به حداقل دو نقطهٔ رصد با تعداد زیادی مشاهده نیاز دارد. شایان یادآوری است، در روش احتمال برگشتی یکی از پارامترهای مکان یا زمان رهاسازی می‌بایست مشخص باشد. هر دو مدل پیش‌بینی خوبی از مکان اولیهٔ آلاینده ارائه می‌دهند. مدل ارائه‌شده در کارهای گذشته تنها برای زمانی قابل استفاده است که سنسورها قادر به اندازه‌گیری دقیق غلظت باشند. Wagner و Neupauer در سال ۲۰۱۵ مدلی را ارائه کردند که قادر است از داده‌های سنسورهایی استفاده کند که تنها محدودهٔ غلظت آلاینده را مشخص می‌کنند. آن‌ها مدل را برای شرایطی که داده‌های غلظت مشاهده نشوند (زیر محدودهٔ اندازه‌گیری قرار می‌گیرد) نیز توسعه دادند. پاسخ سریع و مؤثر مدل نسبت به ورود آلاینده بسیار مهم و ضروری است. بنابراین باید منبع آلاینده با دقت بالایی شناسایی شود. در پژوهش‌های پیشین در نقاط اتصال، به صورت اختلاط کامل در نظر گرفته شده است. Wagner و Neupauer در سال ۲۰۱۵ الگوریتم اختلاط توده را براساس مدل EPANET-BAM توسعه داده‌اند. به عبارت دیگر، تئوری الحاقی قادر به در نظر گرفتن اختلاط ناقص در نقاط اتصال خواهد بود.

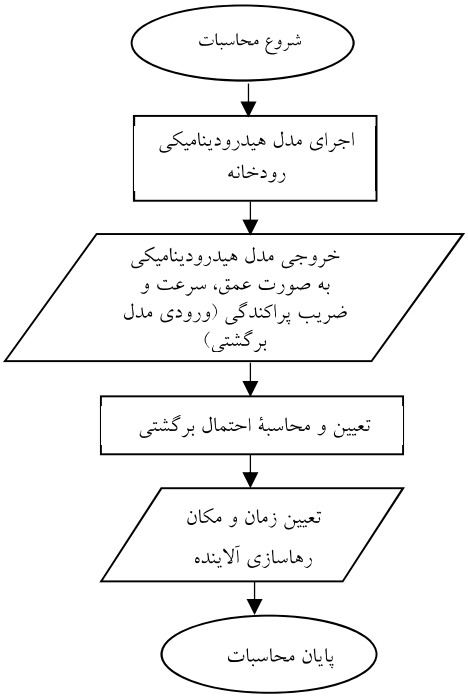
هدف از پژوهش حاضر کاربرد مدل احتمال برگشتی در تشخیص منابع آلاینده در رودخانه با شرایط غیریکنواخت و ماندگار است. معادلات حاکم بر مدل احتمال برگشتی شبیه معادلات حاکم بر انتقال آلاینده است. تفاوت اساسی بین مدل احتمال برگشتی و مدل پیش‌رو، معکوس‌شدن میدان جریان و انجام اصلاحاتی در شرایط مرزی مدل است. همچنین، مدل احتمال برگشتی شامل یک ترم بارگذاری جدید است که به صورت عددی تقریب زده می‌شود. در این پژوهش پس از صحت‌سنجی، مدل برای چندین مثال فرضی به کار گرفته می‌شود.

۲. مبانی نظری پژوهش

روند اجرای محاسبات در روش احتمال برگشتی به این صورت است که ابتدا رودخانه در یک مدل هیدرودینامکی شبیه‌سازی می‌شود. با استفاده از اطلاعات خروجی به‌دست‌آمده از شبیه‌سازی هیدرولیکی، مدل احتمال برگشتی (براساس معادلهٔ الحاقی) ایجاد و اجرا می‌شود. اجرای شبیه‌سازی برگشتی از نقطهٔ مشاهدهٔ آلاینده به سمت بالادست در خلاف جهت جریان و به صورت برگشتی در زمان و مکان انجام می‌گیرد. الگوریتم شناسایی منبع آلاینده به صورت شماتیک در شکل ۱ نشان داده شده است.

۱.۲. معادلهٔ الحاقی

آنالیز الحاقی روشی بسیار قدرتمند برای تخمین حساسیت خروجی‌های مدل نسبت به ورودی‌ها در بسیاری از علوم است. به عبارت دیگر، با استفاده از این روش حساسیت خروجی‌ها نسبت به ورودی‌ها با اجرای یک مرتبه شبیه‌سازی انجام می‌شود.



شکل ۱. الگوریتم شناسایی زمان و مکان آلاینده در رودخانه

روش جزء الحاقی روشی ریاضی را برای به دست آوردن مدل احتمال برگشتی ارائه می‌دهد. در این بخش مبانی به‌کار گرفته‌شده در مدل احتمال برگشتی بیان می‌شود.

۱.۲. معادلهٔ الحاقی

آنالیز الحاقی روشی بسیار قدرتمند برای تخمین حساسیت خروجی‌های مدل نسبت به ورودی‌ها در بسیاری از علوم است. به عبارت دیگر، با استفاده از این روش حساسیت خروجی‌ها نسبت به ورودی‌ها با اجرای یک مرتبه شبیه‌سازی انجام می‌شود. روش جزء الحاقی روشی ریاضی را برای به دست آوردن مدل احتمال برگشتی ارائه می‌دهد. در این بخش مبانی به‌کار گرفته‌شده در مدل احتمال برگشتی بیان می‌شود. در این بخش ابتدا معادلهٔ الحاقی به طور خلاصه معرفی، سپس تغییرات موردنیاز به منظور حل این معادله به‌منزلهٔ معادلهٔ اصلی احتمال برگشتی بیان می‌شود. با استفاده از روش جزء الحاقی نشان داده می‌شود که مدل احتمال برگشتی به‌منزلهٔ جزء کمکی در معادلات پیش‌رو می‌تواند به کار گرفته شود. معادلهٔ الحاقی که به صورت زیر تعریف می‌شود، می‌تواند پیش‌روی جزء الحاقی ψ را در رودخانه‌ای با سرعت V، مساحت عبور جریان A، دبی Q و ضریب پخشیدگی D بیان کند. با استفاده از این شیوه، معادلات حاکم و شرایط مرزی معادلات برگشتی برای رودخانه‌ای با شرایط غیریکنواخت به صورت زیر اثبات می‌شود:

(۱)

$$\frac{\partial h}{\partial C}+\frac{\partial(\psi A)}{\partial \tau}+\frac{\partial}{\partial x}(DA\frac{\partial \psi}{\partial x})+\frac{\partial(\psi Q)}{\partial x}=0$$
$$\psi(x,0)=0$$
$$\psi(x,\tau)=0$$

τ: زمان برگشتی است که از گام زمانی آخر به گام زمانی اول پیش می‌رود. بعد جزء الحاقی براساس ترم بارگذاری $\partial h/\partial C$ تعیین می‌شود. شایان یادآوری است که h تابعی از تمامی متغیرهای سامانه از جمله سرعت، دبی، سطح مقطع و ضریب پخشیدگی است. شرایط مرزی بالادست شرط مرزی نوع سوم و شرایط مرزی پایین‌دست شرط مرزی نوع اول (گرادیان صفر) در نظر گرفته می‌شود.

۲.۲. کاربرد عددی معادلهٔ انتقال

به منظور محاسبهٔ احتمال برگشتی رهاسازی آلاینده در رودخانه، مدل عددی احتمال برگشتی براساس رویکرد حجم محدود و الگوی صریح مرکزگرا توسعه داده شده است. به منظور استفاده از این مدل در رودخانه می‌بایست میدان جریان معکوس شود. به عبارت دیگر، برای تمامی پارامترهای مربوط به میدان جریان (دبی و سرعت) معکوس می‌شود. چنانکه جریان ماندگار باشد، تنها جهت جریان معکوس می‌شود و چنانکه جریان غیرماندگار باشد، علاوه بر معکوس‌شدن جریان گام‌های زمانی از انتها به ابتدا به مدل وارد می‌شوند. شرط مرزی استفاده‌شده در پایین‌دست (نقطهٔ مشاهداتی) شرط مرزی نوع اول (گرادیان صفر) و در نقطهٔ ابتدایی کانال از شرط مرزی نوع سوم استفاده شده است (معادلهٔ ۲).

(۲)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Downstream Boundry}: \quad D\dfrac{\partial \psi^*}{\partial x}=0 \qquad at\ x\ \text{detection}=0\\ \text{Upstream Boundry}: \quad D\dfrac{\partial \psi^*}{\partial x}+V\psi^*=0 \quad at\ x\ \text{first}\end{array}\right\}\ \text{for PDFs}$$

۳.۲. تقریب ترم بارگذاری احتمال برگشتی مکان

با در نظر گرفتن بارگذاری ناگهانی در رودخانه ترم بارگذاری $\partial h/\partial C$ به وسیلهٔ تابع دلتای دیراک تخمین زده می‌شود. ترم بارگذاری به دلیل ناگهانی‌بودن تخلیه می‌تواند به نوعی به صورت شرایط اولیه در نظر گرفته شود. براساس مطالعات Neupauer و Wilson در سال ۲۰۰۵ می‌توان شرایط ابتدایی معادلهٔ الحاقی را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\frac{\partial h}{\partial C}=\delta(x_1-x_d)\delta(t-t_0) \qquad (۳)$$

و در زمان رهاسازی جزء الحاقی به صورت زیر تخمین زده می‌شود:

$$\psi_x(x_1,0)=\frac{1}{A_1\Delta x} \qquad (۴)$$
$$Otherwise \quad \psi_x(x,0)=0$$

با توجه به اینکه در لحظهٔ شروع، آلاینده با احتمال صددرصد در نقطهٔ مشاهداتی وجود دارد، بنابراین احتمال وجود آلاینده در لحظات ابتدایی برابر یک خواهد بود. به عبارت دیگر، احتمال برگشتی مکان در سلول مشاهداتی به صورتی آزاد می‌شود که مساحت زیر نمودار احتمال رهاشده $\frac{1}{A_1\Delta x}$ نسبت به زمان برابر واحد ($\frac{1}{A_1}$) باشد. احتمال در تعدادی از گام‌های زمانی (n) رها می‌شود تا سطح زیر نمودار برابر واحد شود:

$$n\Delta t V\ \frac{1}{A\Delta x}=\frac{1}{A} \qquad (۵)$$

۴.۲. تقریب ترم بارگذاری احتمال برگشتی زمان پیمایش

با در نظر گرفتن بارگذاری ناگهانی در رودخانه ترم بارگذاری $\partial h/\partial C$ به وسیلهٔ تابع دلتای دیراک تخمین زده می‌شود. ترم بارگذاری به دلیل ناگهانی‌بودن تخلیه می‌تواند به نوعی به صورت شرایط اولیه در نظر گرفته شود. می‌توان شرایط ابتدایی معادلهٔ الحاقی را به صورت زیر تعریف کرد (Neupauer & Wilson, 2006):

(۶)

$$C_{flux}=C-\frac{D}{V}\frac{\partial C}{\partial x}$$
$$h(x,\tau)=C_f\delta(x_1-x_d)\delta(t-t_0)=$$
$$\left[C-\frac{D}{V}\frac{\partial C}{\partial x}\right]\delta(x_1-x_d)\delta(t-t_0)$$

با اعمال مشتق Ferechet از معادلهٔ ۶ تغییرات ترم بارگذاری نسبت به غلظت به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial h}{\partial C}=V\,\delta(x_1-x_d)\delta(t-t_0)- \qquad (۷)$$
$$D\delta'(x_1-x_d)\delta(t-t_0)$$

چنانکه معادلهٔ ۷ در معادلهٔ الحاقی به کار برده شود، می‌توان جزء الحاقی را به‌منزلهٔ شرایط اولیه به صورت زیر تعریف کرد:

$$C_{flux}=C-\frac{D}{V}\frac{\partial C}{\partial x}$$
$$h(x,\tau)=C_f\delta(x_1-x_d)\delta(t-t_0) \qquad (۸)$$
$$=[C-\frac{D}{V}\frac{\partial C}{\partial x}]\delta(x_1-x_d)\delta(t-t_0)$$

بنابراین با توجه به ناگهانی‌بودن رهاسازی، بارگذاری در نقاط رهاسازی به وسیلهٔ تابع دلتای دیراک تخمین زده می‌شود.

۵.۲. صحت‌سنجی مدل

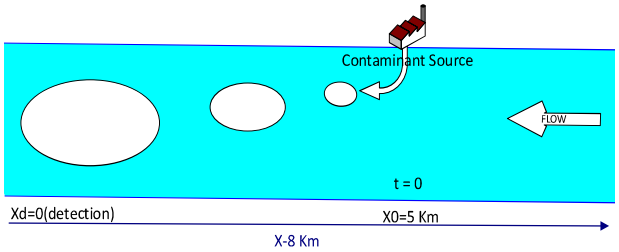
به منظور صحت‌سنجی مدل‌های احتمال برگشتی مکان و زمان پیمایش، نتایج مدل عددی با نتایج حل‌های تحلیلی موجود مقایسه می‌شود. حل‌های تحلیلی برای شرایط جریان ماندگار و یکنواخت موجود است (معادلهٔ ۹). بنابراین، مدل برای شرایط رودخانه‌ای یکنواخت و با دبی ثابت اجرا و نتایج مدل عددی با نتایج حل تحلیلی قیاس می‌شود.

$$C^r(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}M\exp\left[\frac{-(x-x_0+Vt)^2}{4Dt}\right]- \frac{V}{2D}M\exp\left[\frac{Vx_0}{D}\right]erfc\left[\frac{(x+x_0+Vt}{\sqrt{4Dt}}\right] \quad (۹)$$

رودخانه‌ای به طول ۸ کیلومتر با مقطع و سرعت ثابت در نظر گرفته می‌شود. کارخانه‌ای در فاصلهٔ ۵ کیلومتری از نقطهٔ مشاهداتی (x=0)، ۱ کیلوگرم آلاینده را به صورت ناگهانی به رودخانه وارد می‌کند. جهت جریان عکس، جهت محور طولی، سرعت متوسط رودخانه و ضریب پخشیدگی در کل دامنه ثابت در نظر گرفته می‌شود. شکل ۲ به صورت شماتیک مسئله را نشان می‌دهد.

جدول ۱. مشخصات هیدرولیکی و آلاینده در رودخانه با شرایط ثابت

عمق جریان H(m)	عرض جریان W(m)	محل رهاسازی X_0(km)	ضریب پراکندگی $D(m^2/s)$	سرعت جریان V(m/s)	جرم آلاینده M(g)	dx(m)
۲	۲۵	۵	۲۰	۰/۵	۱۰۰۰	۲۰

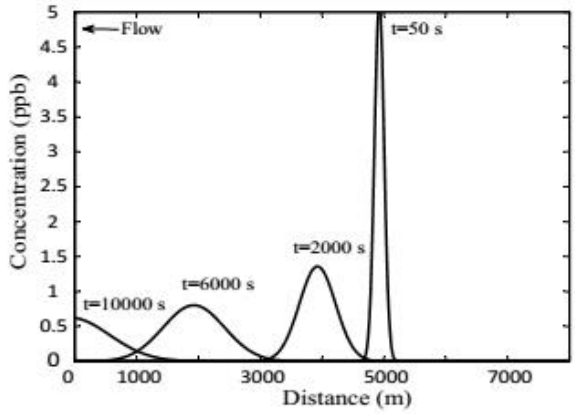


شکل ۲. شکل شماتیک رهاسازی آلاینده در رودخانه با شرایط ثابت

۳. نتایج حل تحلیلی

۱.۳. حل معادلهٔ انتقال به صورت پیش‌رو

آلاینده‌ای به صورت ناگهانی در کیلومتر ۵ از رودخانه رها می‌شود. با استفاده از حل معادلهٔ اصلی انتقال به صورت پیش‌رو (Liu & Wilson, 1995) زمان رسیدن پیک غلظت به نقطهٔ مشاهداتی به مبدأ، در زمان t= ۱۰۰۰۰ ثانیه خواهد بود. بنابراین، می‌توان گفت آلایندهٔ مشاهده‌شده در حال حاضر در نقطهٔ x=0، ۱۰۰۰۰ ثانیه پیش آزاد شده است.



شکل ۳. حل معادلهٔ انتقال به صورت پیش‌رو (زمان رسیدن پیک غلظت به نقطهٔ مشاهداتی ۱۰۰۰۰ ثانیه است)

۲.۳. احتمال برگشتی زمان پیمایش

معادلهٔ ۱۰، حل تحلیلی معادلهٔ تابع احتمال برگشتی زمان پیمایش (Neupauer & Wilson, 2001) را نمایش می‌دهد.

(۱۰)

$$f_\tau(\tau|x)=\frac{-V}{4|V|\sqrt{\pi D\tau^3}}\exp\left[\frac{-(x-x_d+V\tau)^2}{4D\tau}\right]$$

با توجه به معادلهٔ ۸ جزء الحاقی به‌منزلهٔ شرایط اولیهٔ مدل احتمال برگشتی زمان پیمایش به صورت زیر به دست آمده است و در مدل استفاده می‌شود.

(۱۱)

$$x=x_d \rightarrow \psi^*(x_1,0)=V\delta(x-x_d)=\frac{1}{A\Delta x}=\frac{1}{50\times 20}=0.001$$

$$x=x_d-\frac{\Delta x}{2} \rightarrow \psi^*(x_1,0)=-D\frac{\delta(x_1-\{x_d-\Delta x\})}{A(\frac{\Delta x}{2}+\frac{\Delta x}{2})}=-\frac{D}{A\Delta x^2}=-0.0005$$

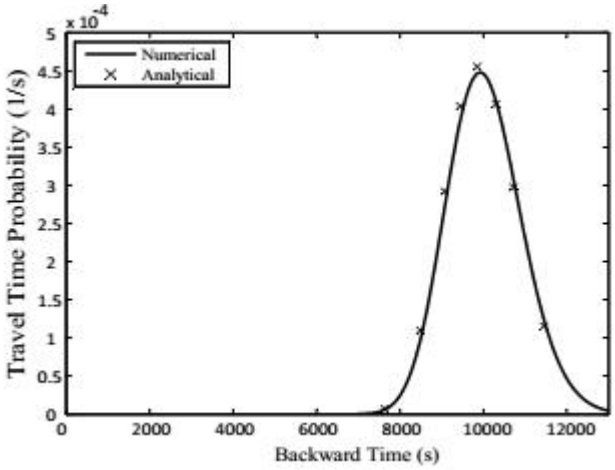
$$x=x_d+\frac{\Delta x}{2} \rightarrow \psi^*(x_1,0)=-D\frac{\delta(x_1-\{x_d+\Delta x\})}{A(\frac{\Delta x}{2}+\frac{\Delta x}{2})}=\frac{D}{A\Delta x^2}=0.0005$$

$$Otherwise \qquad \psi^*(x,0)=0$$

با قراردادن شرایط مرزی بالا در مدل عددی برگشتی توسعه‌داده‌شده، بعد جزء الحاقی $\frac{1}{L^3}$ خواهد بود. با استفاده از رابطهٔ ۱۲ جزء الحاقی تبدیل به احتمال برگشتی زمان پیمایش با بعد $\frac{1}{T}$ خواهد بود.

$$P_i=\psi_i A_i V_i \qquad (۱۲)$$

نمودارهای خروجی (شکل ۴) از مدل احتمالی برگشتی زمان پیمایش در نقطهٔ رهاسازی (کیلومتر ۵) به صورت محاسبه‌شده و با حل تحلیلی حاصل از معادله مقایسه می‌شوند.



شکل ۴. نمودار مقایسهٔ حل تحلیلی و حل عددی احتمال زمان پیمایش

۳.۳. احتمال برگشتی مکان

معادلهٔ ۱۳ حل تحلیلی معادلهٔ تابع احتمال برگشتی مکان (Liu & Wilson, 2000) را نمایش می‌دهد.

$$f_x(x|\tau)=\frac{1}{\sqrt{\pi D\tau}}\exp[\frac{-(x-V\tau)^2}{4D\tau}]-\frac{V}{2D}\exp\left[\frac{Vx}{D}\right]erfc\left[\frac{x+V\tau}{\sqrt{4D\tau}}\right] \qquad (۱۳)$$

شرط مرزی استفاده‌شده در پایین‌دست (نقطهٔ مشاهداتی) شرط مرزی نوع اول (گرادیان صفر) است و در نقطهٔ ابتدایی کانال از شرط مرزی نوع سوم استفاده شده است. در زمان رهاسازی جزء الحاقی به صورت زیر تخمین زده می‌شود:

$$\psi_x^*(x_1,0)=\frac{1}{A\Delta x}=0.001 \qquad (۱۴)$$

$$Otherwise \quad \psi_x^*(x_1,0)=0$$

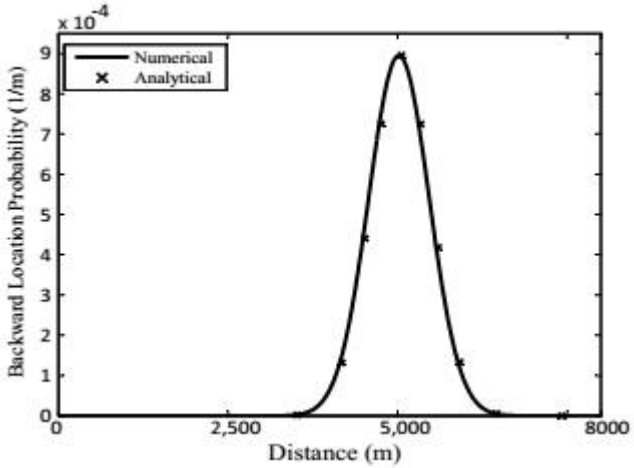
با توجه به اینکه در لحظهٔ شروع، آلاینده با احتمال

صددرصد در نقطهٔ مشاهداتی وجود دارد، بنابراین احتمال وجود آلاینده در لحظات ابتدایی برابر یک خواهد بود. به عبارت دیگر، احتمال برگشتی مکان در سلول مشاهداتی به صورتی آزاد می‌شود که مساحت زیر نمودار احتمال رهاشدهٔ $1/A_1\Delta x$ نسبت به زمان برابر واحد $(1/A_1)$ باشد. احتمال $1/A_1\Delta x$ در تعدادی از گام‌های زمانی (n) رها می‌شود تا سطح زیر نمودار برابر واحد شود:

$$\frac{1}{\Delta x} n\Delta t V = 1 \rightarrow n = \frac{\Delta x}{\Delta t V} = \frac{20}{3.33\times 0.5} \sqcup 12 \quad (۱۵)$$

خروجی به‌دست‌آمده با استفاده از فرمول (۱۶) به احتمال برگشتی مکان تبدیل می‌شود:

$$(P_i)_L = \psi_i A_i \quad (۱۶)$$

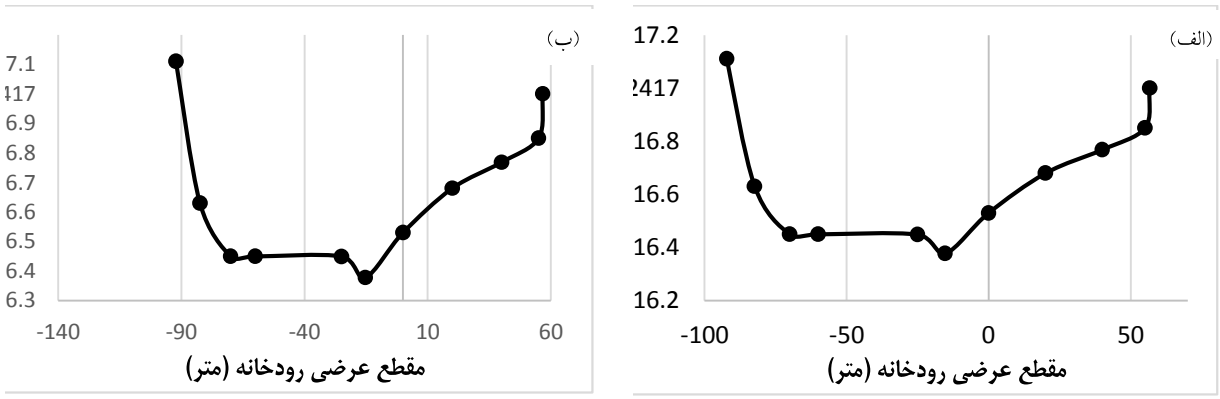


شکل ۵. مقایسهٔ حل تحلیلی و مدل عددی احتمال مکان برگشتی

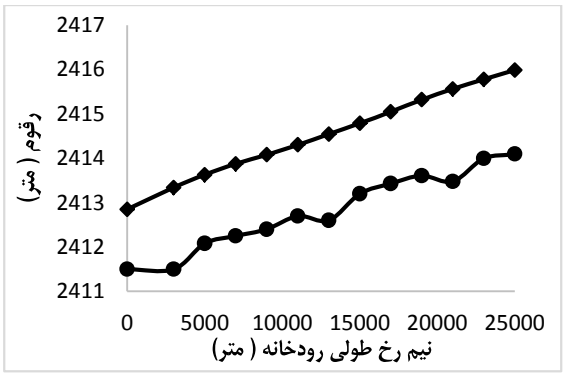
با توجه شکل ۵ و در نظر داشتن اینکه زمان رهاسازی قطعاً ۱۰۰۰۰ ثانیه پیش بوده است، می‌توان با بیشترین احتمال (۵۰ درصد) مکان رهاسازی را در فاصلهٔ ۵ کیلومتری از نقطهٔ مشاهداتی در نظر گرفت. با توجه به داده‌های اولیهٔ محدود استفاده‌شده در مدل، مدل احتمال برگشتی در مکان با دقت نسبتاً بالایی مکان اولیهٔ آلاینده را پیش‌بینی کرده است. نتایج مدل عددی انطباق بسیار خوبی را با نتایج حل تحلیلی نشان می‌دهد.

۴. کاربرد مدل احتمال برگشتی برای شرایط غیریکنواخت و ماندگار

اطلاعات مقاطع رودخانهٔ حسین‌آباد واقع در توابع شهرستان صفاشهر فارس با استفاده از نقشهٔ بسی‌متری رودخانه استخراج شده است. فرضی با مقطع غیریکنواخت به طول ۲۲ کیلومتر به فواصل ۲۰۰ متری در نظر گرفته می‌شود. پس از ورود اطلاعات مقاطع، میان‌یابی به فواصل ۲۰ متری انجام می‌شود. اطلاعات هیدرولیکی مقاطع رودخانه با استفاده از روش گام استاندارد برای فواصل ۲۰ متری محاسبه شده است. شرایط مرزی در بالادست و پایین‌دست رودخانه، شرط عمق نرمال به ترتیب با شیب‌های ۰/۰۱ و ۰/۰۰۱ در نظر گرفته می‌شود. رودخانه با دبی ثابت ۸۰ متر مکعب بر ثانیه اجرا می‌شود. برای مثال، دو مقطع عرضی رودخانه در شکل ۶ نشان داده شده است. همچنین، نیم‌رخ طولی و عرضی رودخانه به صورت شکل‌های ۷ و ۸ خواهد بود. اطلاعات استخراج‌شده از مدل هیدرودینامیکی به مدل احتمال برگشتی وارد می‌شود.



شکل ۶. الف) مقطع عرضی رودخانه در ایستگاه ۴۵ (کیلومتر ۵ از نقطهٔ مشاهداتی)؛ ب) مقطع عرضی رودخانه در ایستگاه ۲۰ (کیلومتر ۱۸ از نقطهٔ مشاهداتی)



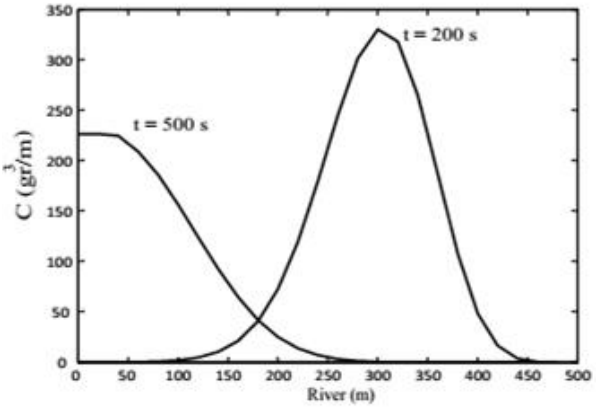
شکل ۷. نیم‌رخ طولی بستر (خط) و سطح آب رودخانه (خط‌چین)

شکل ۸. نمودار تغی‌ی‌رات سرعت در طول رودخانه

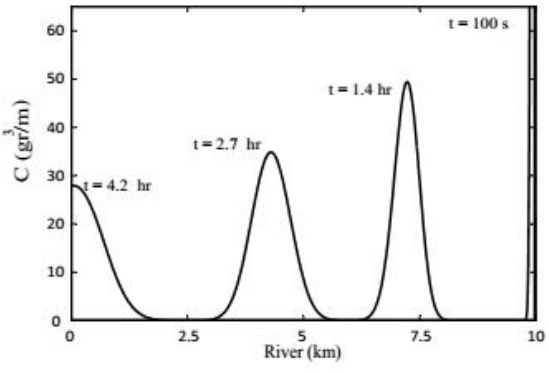
۱.۴. حل پیش‌رو معادلهٔ انتقال

به منظور بررسی توانایی مدل در محاسبهٔ زمان و مکان رهاسازی در نقاط مختلف رودخانه، سه نقطه به صورت مجزا برای رهاسازی آلاینده در نظر گرفته می‌شود. آلاینده‌ای به جرم ۱۰۰ کیلوگرم به طور ناگهانی در نقاط ۵۰۰ متر، ۱۰ کیلومتر و ۲۰ کیلومتر از پایین‌دست به رودخانه وارد می‌شود.

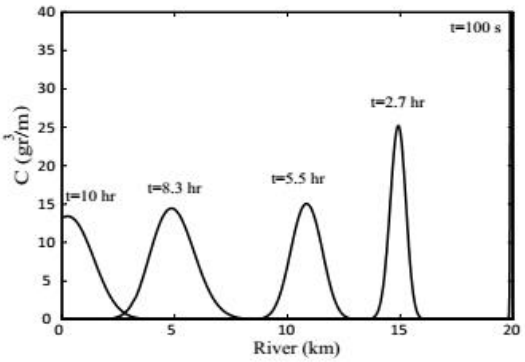
تخمین تابع دلتای دیراک علاوه بر وابسته‌بودن به اندازهٔ سلول‌ها به فواصل گام‌های زمانی نیز وابسته است. بنابراین، به منظور یکسان‌سازی بارگذاری به ازای dt و dxهای متفاوت، مدت زمان بارگذاری ناگهانی ۱۰ ثانیه در نظر گرفته می‌شود. پس از اجرای شبیه‌سازی، انتقال آلاینده به ازای سه نقطهٔ رهاسازی به صورت زیر خواهد بود:



شکل ۹. پیش‌روی آلایندهٔ رهاشده از نقطهٔ ۵۰۰ متری



شکل ۱۰. پیش‌روی آلایندهٔ رهاشده از نقطهٔ ۱۰ کیلومتری



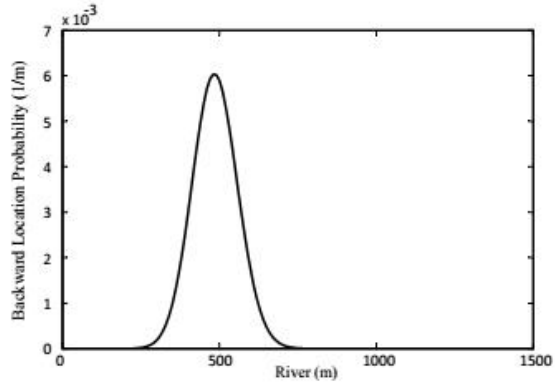
شکل ۱۱. پیش‌روی آلایندهٔ رهاشده از نقطهٔ ۲۰ کیلومتری

با توجه به نمودارهای ۹، ۱۰ و ۱۱ زمان رسیدن پیک غلظت به نقطهٔ مشاهداتی (صفر) برای نقاط ۵۰۰ متری، ۱۰ کیلومتری و ۲۰ کیلومتری به ترتیب برابر ۵۰۰ ثانیه، ۴/۲ ساعت و ۱۰ ساعت خواهد بود. مدل احتمال برگشتی زمان پیمایش، احتمال برگشتی مکان و احتمال برگشتی تجمعی برای سه نقطهٔ رهاسازی به کار گرفته می‌شود.

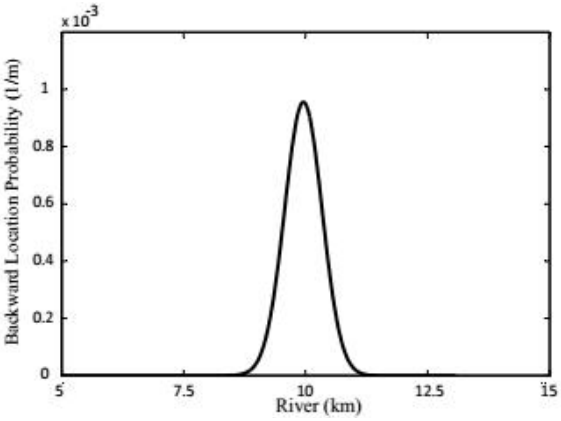
۲.۴. نتایج احتمال برگشتی مکان

پیش از اجرای هر مدل برگشتی این سؤال مطرح می‌شود که آلاینده‌ای که در حال حاضر مشاهده شده از چه مکانی در بالادست رها شده است. پس از اجرای مدل پیش‌رو، صورت مسئله به این صورت خواهد بود که برای مثال، آلاینده‌ای که زمان رهاسازی آن ۱۰ ساعت پیش است، از چه مکانی در بالادست رها شده است. نتایج حل عددی در سه نقطهٔ رهاسازی به صورت زیر خواهد بود: با توجه به شکل ۱۲ بیشترین احتمال در نقطهٔ ۴۸۰ متری از نقطهٔ رهاسازی محاسبه شده است. بنابراین، می‌توان گفت آلاینده از نقطهٔ ۴۸۰ متری و در زمان ۵۰۰ ثانیه پیش از مشاهده، رها شده است. همچنین، از نمودار بالا می‌توان نتیجه گرفت که آلاینده‌ای که در زمان ۵۰۰ ثانیهٔ پیش آزاد شده است، حداکثر در فاصلهٔ ۷۰۰ متری از نقطهٔ مشاهداتی رها شده است. همچنین، با توجه به شکل ۱۳ می‌توان نتیجه گرفت آلاینده‌ای که در ۴/۲ ساعت پیش رها شده، از محلی بین ۸/۸ تا ۱۱/۱ کیلومتری رها شده است. نتایج اجرای برنامه برای مدت زمان ۴/۲ ساعت نشان می‌دهد (شکل ۱۳) که بیشترین احتمال در نقطهٔ ۹/۹ کیلومتری از نقطهٔ رهاسازی محاسبه شده است. بنابراین، با بیشترین احتمال می‌توان گفت آلاینده از نقطهٔ ۹/۹ کیلومتری و در زمان ۴/۲ ساعت پیش از مشاهده رها شده است.

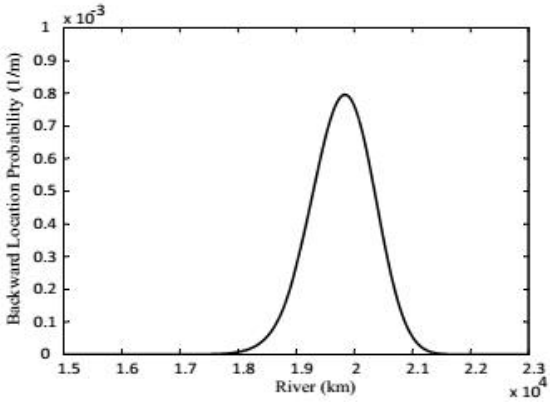
با توجه به شکل ۱۴ می‌توان نتیجه گرفت که آلاینده‌ای که در ۱۰ ساعت پیش رها شده است، از محلی بین ۱۷/۵ تا ۲۲/۱ کیلومتری رها شده است. نتایج اجرای برنامه برای مدت زمان ۱۰ ساعت نشان می‌دهد که بیشترین احتمال در نقطهٔ ۱۹/۸ کیلومتری از نقطهٔ رهاسازی محاسبه شده است. بنابراین، با بیشترین احتمال می‌توان گفت آلاینده از نقطهٔ ۱۹/۸ کیلومتری و در زمان ۱۰ ساعت پیش از مشاهده، رها شده است.



شکل ۱۲. نمودار احتمال برگشتی مکان در زمان برگشتی ۵۰۰ ثانیه



شکل ۱۳. نمودار احتمال برگشتی مکان در زمان برگشتی ۴/۲ ساعت

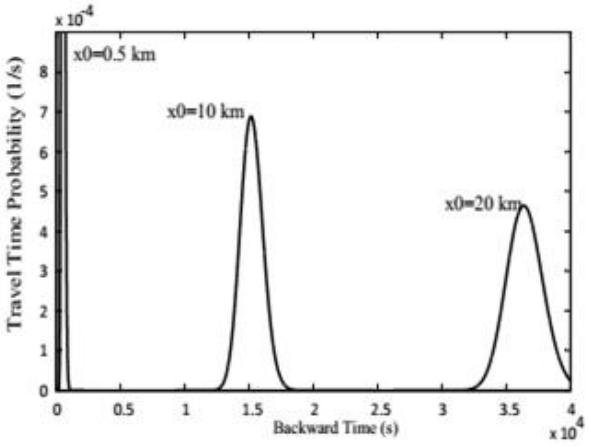


شکل ۱۴. نمودار احتمال برگشتی مکان در زمان برگشتی ۱۰ ساعت

۳.۴. نتایج احتمال برگشتی زمان پیمایش

پیش از ورود به احتمال برگشتی زمان پیمایش طرح سؤال پیش‌رو ضروری به نظر می‌رسد. آلاینده‌ای که نقطهٔ رهاسازی آن می‌تواند یکی از نقاط ۰/۵، ۱۰ و ۲۰ باشد، چند ساعت پیش از مشاهده، رها شده است؟

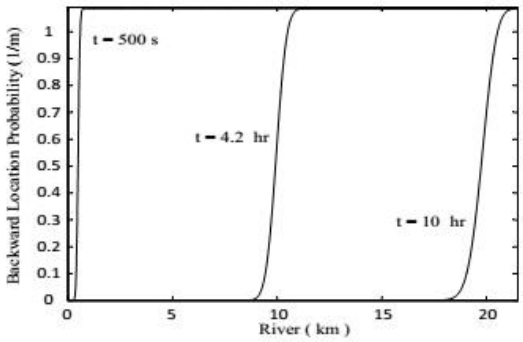
با توجه به نمودار احتمال برگشتی زمان پیمایش (شکل ۱۵) به خوبی مشخص است که، زمان رهاسازی آلاینده در نقاط ۵۰۰ متری، ۱۰ و ۲۰ کیلومتری به ترتیب در زمان‌های ۵۰۰ ثانیه، ۴/۲ ساعت و ۱۰ ساعت پیش است. دیگر نتیجهٔ بسیار مهم شکل 15 را می‌توان به این صورت بیان کرد که به طور مثال، آلاینده‌ای از محلی به فاصلهٔ ۱۰ کیلومتری از نقطهٔ مشاهداتی، در زمانی بین ۳/۸ (۱۳۸۰۰ ثانیه) تا ۴/۷ ساعت (۱۷۰۰۰ ثانیه) پیش آزاد شده است. به همین ترتیب به ازای نقطهٔ رهاسازی ۲۰ کیلومتری آلاینده در زمانی بین ۹ (۳۲۷۰۰ ثانیه) تا ۱۰/۳ ساعت (۳۷۰۰۰ ثانیه) رها شده است.



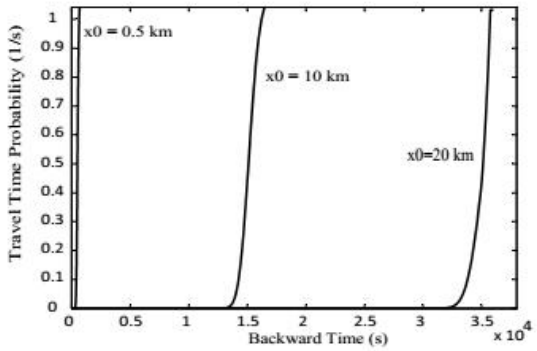
شکل ۱۵. نمودار احتمال برگشتی زمان پیمایش به ازای سه نقطهٔ رهاسازی

۴.۴. نتایج احتمال برگشتی تجمعی

شکل‌های 16 و 17 احتمال تجمعی مکان و زمان پیمایش را به ازای سه نقطهٔ رهاسازی و سه زمان رهاسازی نشان می‌دهند. در شکل 16 چنانکه زمان رهاسازی ۵۰۰ ثانیه در نظر گرفته شود، مکان رهاسازی آلاینده نقطه‌ای بین ۲۵۰ (احتمال صفر) تا ۷۰۰ متری (احتمال یک) است. به عبارت دیگر، با احتمال صددرصد می‌توان گفت که آلاینده‌ای که در زمان ۵۰۰ ثانیه پیش رها شده است، در حدفاصل بین ۲۵۰ تا ۷۰۰ متری رودخانه از نقطهٔ مشاهداتی رها شده است. به همین ترتیب به ازای زمان رهاسازی ۴/۲ و ۱۰ ساعت، نقطهٔ رهاسازی آلاینده به ترتیب در فواصل بین ۹ تا ۱۱کیلومتری و ۱۸/۲ تا ۲۱ کیلومتری خواهد بود. شکل 17مفهوم دیگری از احتمال برگشتی، به نام احتمال تجمعی زمان پیمایش را نشان می‌دهد. براساس این احتمال می‌توان گفت چنانکه نقطهٔ رهاسازی آلاینده در ۵۰۰ متری باشد، آلاینده در زمانی بین ۳۰۰ تا ۶۰۰ ثانیه پیش رها شده است. به همین ترتیب به ازای دو مکان رهاسازی ۱۰ و ۲۰ کیلومتر ۳/۸ (۱۳۸۰۰ ثانیه) تا ۴/۷ ساعت (۱۷۰۰۰ ثانیه) و ۹ (۳۲۷۰۰ ثانیه)تا ۱۰/۳ ساعت (۳۷۰۰۰ ثانیه) رها شده است.



شکل ۱۶. نمودار احتمال تجمعی برگشتی مکان



شکل ۱۷. نمودار احتمال تجمعی برگشتی زمان پیمایش

۵. کاربرد مدل احتمال برگشتی زمان پیمایش در شرایط واقعی

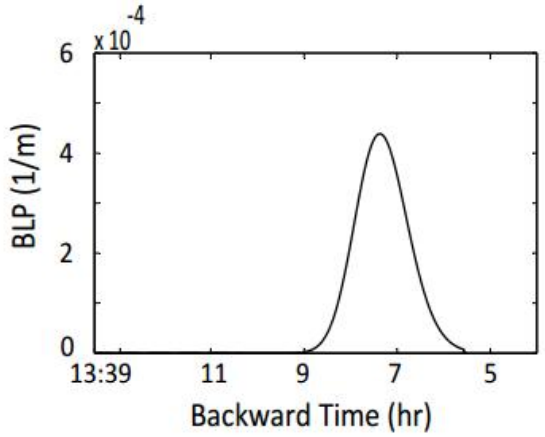
با توجه به اینکه در مطالعات پیشین کاربرد مدل احتمال برگشتی در شرایط رودخانهٔ واقعی و کاملاً غیریکنواخت بررسی نشده است، بنابراین از مهم‌ترین اهداف پژوهش حاضر به کارگیری این مدل در شناسایی منبع آلاینده در یک رودخانهٔ واقعی است. در همین راستا از داده‌های آزمایش ردیاب در رودخانهٔ سورن[5] انگلستان استفاده شد. این آزمایش را Atkinson و Davis در سال ۲۰۰۰ طی ۱۴ کیلومتر از رودخانهٔ سورن در انگلستان انجام دادند. طی این آزمایش یک کیلوگرم مادهٔ ردیاب[6] از بالادست به رودخانه تزریق شده است. نمونه‌برداری از شش ایستگاه در فواصل بین ۲۱۰ تا ۱۳۷۷۵ انجام شده است. شرایط هیدرولیکی در محل تزریق تقریباً ماندگار است. بنابراین، می‌توان شرایط هیدرولیکی را نسبت به زمان ثابت فرض کرد. به عبارت دیگر، طی مدت آزمایش شرایط جریان ماندگار و غیریکنواخت است.

۱.۵. تزریق و نمونه‌برداری

آزمایش در ساعت ۷:۰۷ صبح دوم آوریل سال ۱۹۷۸ شروع شده و آخرین نمونه‌برداری در ساعت ۱۶:۳۰ همان روز به پایان رسیده است. ۱۰۰۰ گرم رودامین ۲۰ درصد رقیق‌شده به وسیلهٔ ۵ لیتر آب مقطر به رودخانه تزریق شد. تزریق به صورت ناگهانی انجام شده است. به صورتی که مادهٔ ردیاب از طریق شخصی که با سرعت ثابت روی پل قدم می‌زند، در عرض رودخانه به جریان وارد می‌شود. این فرایند در مدت ۱۰۵ ثانیه انجام شده است (Atkinson & Davis, 2000). نمونه‌برداری به صورت دستی انجام شده و فواصل نمونه‌برداری به ایستگاه‌ها وابسته است. در ایستگاه‌های بالادست فواصل نمونه‌برداری کوتاه‌تر از ایستگاه‌های پایین‌دست است.

۲.۵. ردیابی منبع آلاینده در رودخانهٔ سورن

شبیه‌سازی برگشتی تنها یک مرتبه از ایستگاه آخر به سمت بالادست اجرا می‌شود. نتایج در **Error! Reference source not found.**۱۸ نمایش داده شده است.



شکل ۱۸. نتایج شبیه‌سازی برگشتی و تعیین زمان رهاسازی مادهٔ ردیاب

شبیه‌سازی برگشتی می‌تواند نتایج دقیق و کاربردی همچون زمان رهاسازی، مکان رهاسازی و مقدار مادهٔ

آلاینده را ارائه دهد. خلاصه‌ای از این نتایج در **Error! Reference source not found.** نمایش داده شده است. شایان یادآوری است مکان واقعی رهاسازی آلاینده به‌منزلهٔ مبدأ (x=0) در نظر گرفته شود. با توجه به ستون سوم از **Error! Reference source not found.** مشخص است که مدل احتمال برگشتی با خطای حداکثر ۱۴ دقیقه زمان رهاسازی آلاینده را در شرایط غیریکنواخت یک رودخانهٔ واقعی به خوبی پیش‌بینی کرده است.

جدول ۱. تخمین مکان و زمان رهاسازی آلاینده

ایستگاه	فاصلهٔ ایستگاه از نقطهٔ تزریق	زمان رهاسازی تخمین زده‌شده (زمان واقعی ۷:۰۷)
G	۱۳۷۷۵	۷:۲۱

۶. بحث و نتیجه‌گیری

رودخانه‌ها از جمله مهم‌ترین منابع طبیعی بوده‌اند که همواره نیاز بشر را برآورده کرده‌اند. این منابع نسبت به مواد شیمیایی حاصل از صنایع و کشاورزی که عموماً به صورت ناگهانی به رودخانه‌ها وارد می‌شوند، بسیار آسیب‌پذیرند. شناسایی هرچه سریع‌تر مکان رهاسازی مواد آلاینده، با استفاده از داده‌های نقاط نمونه‌برداری، بسیار حائز اهمیت است و علاوه بر حفظ این منابع ارزشمند، می‌توان حجم خسارات وارده را به حداقل رسانید. پژوهش حاضر به دنبال به کارگیری روش احتمال برگشتی در شناسایی منبع آلاینده در رودخانه‌هاست. با توجه به نتایج به‌دست‌آمده در بخش‌های پیشین، به خوبی مشخص است که مدل احتمال برگشتی توانایی تشخیص مکان یا زمان رهاسازی آلاینده در شرایط غیریکنواخت رودخانه را دارد.

معادلات حاکم بر مدل احتمال برگشتی شبیه معادلات حاکم بر انتقال آلاینده است. تفاوت اساسی بین مدل احتمال برگشتی و مدل پیش‌رو، معکوس‌شدن میدان جریان و اصلاحاتی در شرایط مرزی مدل است. همچنین، مدل احتمال برگشتی شامل یک ترم بارگذاری جدید است که به صورت عددی تقریب زده می‌شود. به منظور استفاده از مدل برگشتی ابتدا با استفاده از مدل هیدرودینامیکی، پارامترهای میدان جریان محاسبه و در مکان و زمان معکوس می‌شود. شرایط مرزی استفاده‌شده در مدل احتمال برگشتی بسیار واضح است. شرط مرزی نوع اول در مدل پیش‌رو به شرط مرزی نوع اول با بزرگی متفاوت تبدیل می‌شود. شرط مرزی نوع دوم در مدل پیش‌رو به شرط مرزی نوع سوم در مدل احتمال برگشتی تبدیل می‌شود. همچنین، ترم بارگذاری در مدل برگشتی شامل یک تابع دلتای دیراک در مکان و زمان است.

هر دو مدل احتمال برگشتی زمان پیمایش و مدل احتمال برگشتی مکان برای یک کانال با مقطع و سرعت ثابت استفاده شد. نتایج مدل عددی تطابق خوبی را با نتایج حل تحلیلی نشان می‌دهد. سپس هر دو مدل احتمالی برای سه نقطه از یک رودخانه به طول ۲۲ کیلومتر با شرایط غیریکنواخت و ماندگار آزمایش شد. نتایج مدل نشان می‌دهد که مدل به خوبی قادر به پیش‌بینی مکان و زمان رهاسازی آلاینده در رودخانه‌ای با شرایط غیریکنواخت و ماندگار است. مزیت عمدهٔ این روش نسبت به دیگر روش‌ها عدم ساده‌سازی بیش از حد مسئله نسبت به واقعیت است. در روش احتمال برگشتی جواب مسئله به صورت احتمال در مکان و زمان بیان شده است و با غیریکتایی پاسخ‌ها روبه‌رو نخواهد بود. این روش نسبت به سایر روش‌های بازگشتی، به‌ویژه روش‌های شبیه‌سازی–بهینه‌سازی از سرعت بالاتری برخوردار است، زیرا فقط با یک بار اجرای برنامه محل دقیق آلاینده مشخص می‌شود و نیازی به اجرای متعدد مدل نیست. از محدودیت‌های این روش این است که، تنها برای منبع آلاینده نقطه‌ای ناگهانی به کار گرفته شده است. پیشنهاد می‌شود در پژوهش‌های آتی با اعمال تغییراتی در معادلهٔ الحاقی شرایط بارگذاری مسئله به بارگذاری پالسی تغییر یابد. همچنین، با توجه به اینکه شرایط جریان در اغلب رودخانه‌ها غیرماندگار است، این مدل به گونه‌ای توسعه داده شود که قابلیت کاربرد در

رودخانه‌های با شرایط غیرماندگار را نیز دارا باشد.

۷. خلاصه و جمع‌بندی

در بسیاری از پژوهش‌های پیشین مدل احتمال برگشتی در آب‌های زیرزمینی به کار گرفته شده است. در پژوهش حاضر مدل احتمال برگشتی برای رودخانه‌ای با شرایط غیریکنواخت به کار گرفته شد. در پایان با اطمینان بسیار بالایی می‌توان گفت مدل احتمال برگشتی در رودخانه با شرایط غیریکنواخت به خوبی کاربرد دارد. پیشنهاد می‌شود، این مدل در رودخانه‌ای با شرایط غیرماندگار نیز آزمایش شود.

یادداشت‌ها

1. Backward in Time Model for Location Probability
2. Backward in Time Model for Location Probability
3. Adjoint State
4. Adjoint State Method

منابع

Atkinson, T. C., & Davis, P. M. 2000. Longitudinal dispersion in natural channels: l. Experimental results from the River Severn, UK". Hydrology and Earth System Sciences Discussions, 4(3), 345-353.

Cheng, W. P., & Jia, Y. 2010. Identification of contaminant point source in surface waters based on backward location probability density function method. Advances in Water Resources, 33(4), 397-410.

Cupola, F., Tanda, M. G., & Zanini, A.2014. Laboratory sandbox validation of pollutant source location methods. Stochastic Environmental Research and Risk Assessment, 1-14.

Dang, Q. A., Ehrhardt, M., Tran, G. L., & Le, D. 2012. Mathematical modeling and numerical algorithms for simulation of oil pollution. Environmental modeling & assessment, 17(3), 275-288.

Liu, J. J. 1995. Travel time and location probabilities for groundwater contaminant sources (Doctoral dissertation, New Mexico Institute of Mining and Technology).

Molson, J. W., & Frind, E. O. 2012. On the use of mean groundwater age, life expectancy and capture probability for defining aquifer vulnerability and time-of-travel zones for source water protection. Journal of contaminant hydrology,127(1), 76-87.

Neupauer, R. M., & Wilson, J. L. 1999. Adjoint method for obtaining backward-in-time location and travel time probabilities of a conservative groundwater contaminant. Water Resources Research, 35(11), 3389-3398.

Neupauer, R. M., & Wilson, J. L. (2001). Adjoint-derived location and travel time probabilities for a multidimensional groundwater system. Water Resources Research, 37(6), 1657–1668.

Neupauer, R. M., & Wilson, J. L. (2002). Backward probabilistic model of groundwater contamination in non-uniform and transient flow. Advances in Water Resources, 25(7), 733–746.

Neupauer, R. M., & Wilson, J. L. 2004. Numerical implementation of a backward probabilistic model of ground water contamination. Groundwater,42(2), 175-189.

Neupauer, R. M., & Wilson, J. L. 2005. Backward probability model using multiple observations of contamination to identify groundwater contamination sources at the Massachusetts Military Reservation. Water resources research,41(2).

Neupauer, R. M., & Lin, R. 2006. Identifying sources of a conservative groundwater contaminant using backward probabilities conditioned on measured concentrations. Water resources research, 42(3).

Wagner, D. E., Neupauer, R. M., & Cichowitz, C. 2015. Adjoint-Based Probabilistic Source Characterization in Water-Distribution Systems with Transient Flows and Imperfect Sensors. Journal of Water Resources Planning and Management, 141(9), 040150